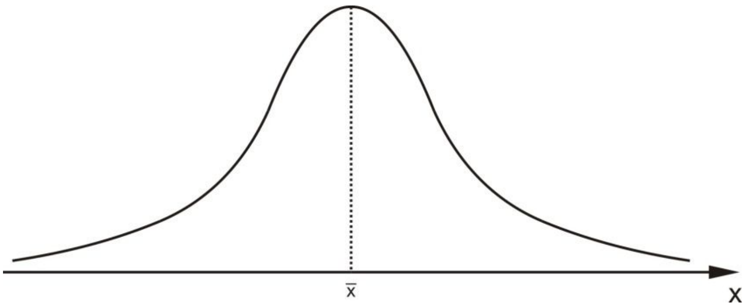
DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Entre as distribuições teóricas de variável contínua, uma das mais empregadas é a distribuição normal.

O aspecto gráfico de uma distribuição normal é o da figura abaixo.



Para uma perfeita compreensão da distribuição normal, observe a figura acima e procure visualizar as seguintes propriedades:

1ª) A variável aleatória x pode assumir todo e qualquer valor real.

2ª) A representação gráfica da distribuição normal é uma curva em forma de sino, simétrica em torno da média ($\overline{X}$), que recebe o nome de curva normal ou de Gauss.

3ª) A área total limitada pela curva e pelo eixo das abscissas é igual a 1, já que essa área corresponde à probabilidade de a variável aleatória X assumir qualquer valor real.

4ª) A curva normal é assintótica em relação ao eixo das abscissas, isto é, aproxima-se indefinidamente do eixo das abscissas sem, contudo, alcançá-lo.

5ª) Como a curva é simétrica em torno de $\overline{X}$, a probabilidade de ocorrer valor maior do que a média é igual à probabilidade de ocorrer valor menor do que a média, isto é, ambas as probabilidades são iguais a 0,5. Escrevemos: $P(X > \overline{X}) = P(X < \overline{X}) = 0{,}5$.

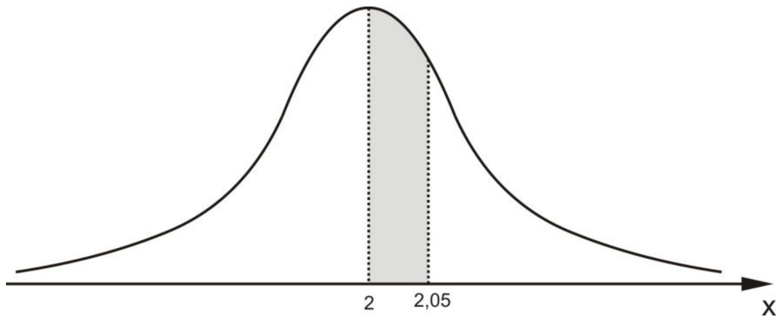
Quando temos em mãos uma variável aleatória com distribuição normal, nosso principal interesse é obter a probabilidade de essa variável aleatória assumir um valor em um determinado intervalo. Vejamos como proceder, por meio de um exemplo concreto.

Seja x a variável aleatória que representa os diâmetros dos parafusos produzidos por certa máquina. Vamos supor que essa variável tenha distribuição normal com média $\overline{X} = 2cm$ e desvio padrão $S = 0{,}05cm$.

Pode haver interesse em conhecer a probabilidade de um parafuso ter um diâmetro com valor entre 2 e 2,05cm.

É fácil notar que essa probabilidade, indicada por:

$P(2 < x < 2{,}05)$, correspondente à área hachurada da figura abaixo:



O cálculo direto dessa probabilidade exige um conhecimento de Matemática mais avançada do que aquele que dispomos no curso de ensino médio. Entretanto, podemos contornar facilmente esse problema. Basta aceitar, sem demonstração, que se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média $\overline{X}$ e desvio padrão S, então a variável:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$$

tem distribuição normal reduzida, isto é, tem distribuição normal de média 0 e desvio padrão 1, isto é:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

A tabela abaixo é uma tabela de distribuição normal reduzida, que nos dá a probabilidade de Z tomar qualquer valor entre a média 0 e um dado valor z, isto é:

$$P(0 < Z < z)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Temos então, que se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média $\bar{x}$ e desvio padrão S, podemos escrever:

$$P(\bar{x} < X < x) = P(0 < Z < z), \text{ com } z = \frac{x - \bar{x}}{S}.$$

Voltemos, então, ao nosso problema.

Queremos calcular $P(2 < X < 2{,}05)$. Para obter essa probabilidade, precisamos, em primeiro lugar, calcular o valor de z que corresponde a $x = 2{,}05$ ($x = 2 \Rightarrow z = 0$, pois $\bar{x} = 2$). Temos então:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{2{,}05 - 2}{0{,}04} = \frac{0{,}05}{0{,}04} = 1{,}25$$

donde:

$$P(2 < X < 2{,}05) = P(0 < Z < 1{,}25)$$

Procuremos agora na tabela da distribuição normal reduzida o valor de $z = 1{,}25$.

Na primeira coluna encontramos o valor 1,2. Em seguida, encontramos, na primeira linha, o valor 5, que corresponde ao último algarismo do número 1,25. Na intersecção da linha e coluna correspondentes encontramos o valor 0,3944, o que nos permite escrever:

$$P(0 < Z < 1{,}25) = 0{,}3944$$

Assim, a probabilidade de um parafuso fabricado por essa máquina apresentar um diâmetro entre a média $\bar{x} = 2$ e o valor $x = 2{,}05$ é 0,3944.

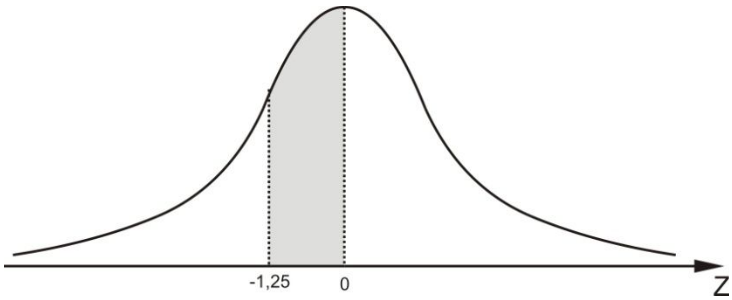
Escrevemos então:

$$P(2 < X < 2{,}05) = P(0 < Z < 1{,}25) = 0{,}3944 \text{ ou } 39{,}44\%.$$

<u>Exemplos:</u> 1) Determine as probabilidades:

a) $P(-1{,}25 < Z < 0)$

A probabilidade procurada corresponde à parte hachurada da figura:



Sabemos que:

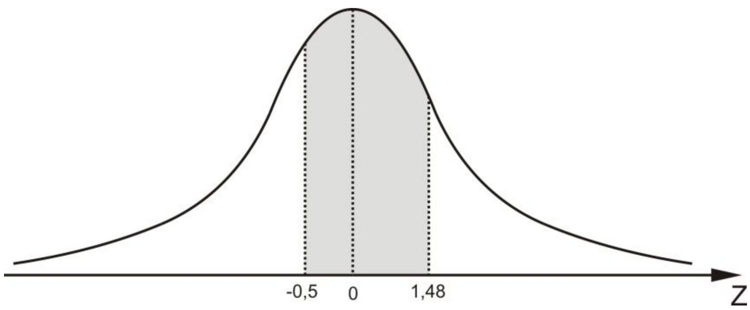
$$P(0 < Z < 1{,}25) = 0{,}3944$$

Pela assimetria da curva, temos:

$$P(-1{,}25 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}25) = 0{,}3944$$

b) $P(-0{,}5 < Z < 1{,}48)$

A probabilidade procurada correspondente à parte hachurada da figura:



Temos:

$$P(-0{,}5 < Z < 1{,}48) = P(-0{,}5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1{,}48)$$

Como:

$$P(-0{,}5 < Z < 0) = P(0{,}5 < Z < 0) = 0{,}1915$$

e

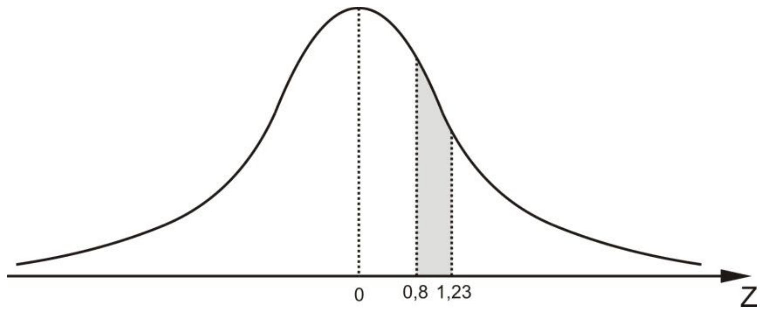
$$P(0 < Z < 1{,}48) = 0{,}4306$$

obtemos:

$$P(-0{,}5 < Z < 1{,}48) = 0{,}1915 + 0{,}4306 = 0{,}6221$$

c) $P(0{,}8 < Z < 1{,}23)$

A probabilidade procurada correspondente à parte hachurada da figura:



Temos:

$$P(0{,}8 < Z < 1{,}23) = P(0 < Z < 1{,}23) - P(0 < Z < 0{,}8)$$

Como:

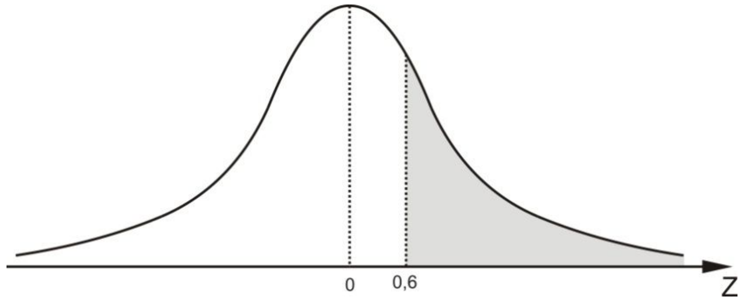
$P(0 < Z < 1{,}23) = 0{,}3907$ e $P(0 < Z < 0{,}8) = 0{,}2881$

obtemos:

$$P(0{,}8 < Z < 1{,}23) = 0{,}3907 - 0{,}2881 = 0{,}1026$$

d) $P(Z > 0{,}6)$

A probabilidade procurada correspondente à parte hachurada da figura:



Temos:

$P(Z > 0{,}6) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 0{,}6)$

Como:

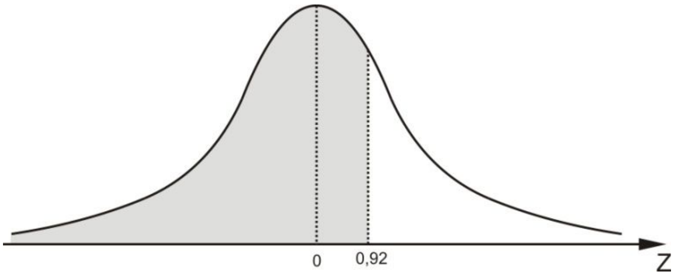
$P(Z > 0) = 0{,}5$ e $P(0 < Z < 0{,}6) = 0{,}2258$

obtemos:

$P(Z > 0{,}6) = 0{,}5 - 0{,}2258 = 0{,}2742$

d) $P(Z < 0{,}92)$

A probabilidade procurada correspondente à parte hachurada da figura:



Temos:

$P(Z < 0{,}92) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 0{,}92)$

Como:

$P(Z < 0) = 0{,}5$ e $P(0 < Z < 0{,}92) = 0{,}3212$

obtemos:

$P(Z < 0{,}92) = 0{,}5 + 0{,}3212 = 0{,}8212$

2) Os salários semanais dos operários industriais são distribuídos normalmente, em torno da média de R$10.000,00, com desvio padrão de R$800,00. Calcule a probabilidade de um operário ter um salário semanal situado entre R$9.800 e R$10.400.

Devemos, inicialmente, determinar os valores da variável de distribuição normal reduzida.

Assim:

$z_1 = \dfrac{x - \overline{x}}{S} = \dfrac{9800 - 10000}{800} = -0{,}25$ e $z_2 = \dfrac{x - \overline{x}}{S} = \dfrac{10400 - 10000}{800} = 0{,}5$

Logo, a probabilidade procurada é dada por:

$P(9800 < X < 10400) = P(-0{,}25 < Z < 0{,}5) = P(-0{,}25 < Z < 0) + P(0 < Z < 0{,}5)$

$= 0{,}0987 + 0{,}1915 = 0{,}2902$

É, pois, de se esperar que, em média, 29,02% dos operários tenham salários entre R$9.800,00 e R$10.400,00.

Exercícios

1) Sendo Z uma variável com distribuição normal reduzida, calcule:

a) $P(0 < Z < 1{,}44)$ b) $P(-0{,}85 < Z < 0)$ c) $P(-1{,}48 < Z < 2{,}05)$

d) $P(0{,}72 < Z < 1{,}89)$ e) $P(Z < -2{,}03)$ f) $P(Z > 1{,}08)$

g) $P(Z < -0{,}66)$ h) $P(Z < 0{,}60)$

2) Um teste padronizado de escolaridade tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10. Determine a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota:

a) maior que 120. b) maior que 80.

c) entre 85 e 115. d) maior que 100.

3) Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuídos com média 65,3kg e desvio padrão 5,5kg. Determine o número de estudantes que pesam:

a) entre 60 e 70kg;

b) mais que 62,5kg;

c) menos que 68kg.

4) A duração de um certo componente eletrônico tem média de 850 dias e desvio padrão de 40 dias. Sabendo que a duração é normalmente distribuída, calcule a probabilidade de esse componente durar:

a) entre 700 e 1000 dias;

b) mais de 800 dias;

c) menos de 750 dias.

Gabarito

1) Sendo Z uma variável com distribuição normal reduzida, calcule:

a) $P(0 < Z < 1{,}44) = 0{,}4251$ ou $42{,}51\%$

b) $P(-0{,}85 < Z < 0) = P(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}3023$ ou $30{,}23\%$

c) $P(-1{,}48 < Z < 2{,}05) = P(-1{,}48 < Z < 0) + P(0 < Z < 2{,}05) = P(0 < Z < 1{,}48) + P(0 < Z < 2{,}05) = 0{,}4306 + 0{,}4798 = 0{,}9104$ ou $91{,}04\%$

d) $P(0{,}72 < Z < 1{,}89) = P(0 < Z < 1{,}89) - P(0 < Z < 0{,}72) = 0{,}4706 - 0{,}2642 = 0{,}2064$ ou $20{,}64\%$

e) $P(Z < -2{,}03) = P(-2{,}03 < Z < 0) + P(Z > 0) = P(0 < Z < 2{,}03) + P(Z > 0) = 0{,}4788 + 0{,}5 = 0{,}9788$

ou $97{,}88\%$

f) $P(Z > 1{,}08) = P(Z > 0) - P(Z > 1{,}08) = 0{,}5 - 0{,}3599 = 0{,}1401$ ou $14{,}01\%$

g) $P(Z < -0{,}66) = P(Z > 0) - P(-0{,}66 < Z < 0) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 0{,}66) = 0{,}5 - 0{,}2454 = 0{,}2546$

ou $25{,}46\%$

h) $P(Z < 0{,}60) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 0{,}60) = 0{,}5 + 0{,}2257 = 0{,}7257$ ou $72{,}57\%$

2) Um teste padronizado de escolaridade tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10. Determine a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota:

a) maior que 120.

$\bar{x} = 100 \qquad S = 10 \qquad Z = \dfrac{x - \bar{x}}{S} = \dfrac{120 - 100}{10} = 2$

$P(Z > 2) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$

b) maior que 80.

$Z = \dfrac{x - \bar{x}}{S} = \dfrac{80 - 100}{10} = -2$

$P(Z > -2) = P(Z > 0) + P(-2 < Z < 0) = P(Z > 0) + P(0 < Z < 2) = 0{,}5 + 0{,}4772 = 0{,}9772$

c) entre 85 e 115.

$Z_1 = \dfrac{x - \bar{x}}{S} = \dfrac{85 - 100}{10} = -1{,}5 \qquad Z_2 = \dfrac{x - \bar{x}}{S} = \dfrac{115 - 100}{10} = 1{,}5$

$P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = P(-1{,}5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1{,}5) = P(0 < Z < 1{,}5) + P(0 < Z < 1{,}5) = 0{,}4332 + 0{,}4332 = 0{,}8664$

d) maior que 100.

$Z = \dfrac{x - \bar{x}}{S} = \dfrac{100 - 100}{10} = 0$

$P(Z > 0) = 0{,}5$

3) Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuídos com média 65,3kg e desvio padrão 5,5kg. Determine o número de estudantes que pesam:

a) entre 60 e 70kg;

$\bar{x} = 65{,}3 \qquad S = 5{,}5$

$$Z_1 = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{60 - 65{,}3}{5{,}5} = -0{,}96 \qquad Z_2 = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{70 - 65{,}3}{5{,}5} = 0{,}85$$

$$P(-0{,}96 < Z < 0{,}85) = P(-0{,}96 < Z < 0) + P(0 < Z < 0{,}85) = P(0 < Z < 0{,}96)$$
$$+ P(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}3315 + 0{,}3023 = 0{,}6338$$

b) mais que 62,5kg;

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{62{,}5 - 65{,}3}{5{,}5} = -0{,}38$$

$$P(Z > -0{,}38) = P(Z > 0) + P(-0{,}38 < Z < 0) = P(Z > 0)$$
$$+ P(0 < Z < 0{,}38) = 0{,}5 + 0{,}1480 = 0{,}6480$$

c) menos que 68kg.

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{68 - 65{,}3}{5{,}5} = 0{,}49$$

$$P(Z < 0{,}49) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 0{,}49) = 0{,}5 + 0{,}1879 = 0{,}6879$$

4) A duração de um certo componente eletrônico tem média de 850 dias e desvio padrão de 40 dias. Sabendo que a duração é normalmente distribuída, calcule a probabilidade de esse componente durar:

a) entre 700 e 1000 dias;

$$\bar{x} = 850 \qquad S = 40$$

$$Z_1 = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{700 - 850}{40} = -3{,}75 \qquad Z_2 = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{1000 - 850}{40} = 3{,}75$$

$$P(-3{,}75 < Z < 3{,}75) = P(-3{,}75 < Z < 0) + P(0 < Z < 3{,}75) = P(0 < Z < 3{,}75)$$
$$+ P(0 < Z < 3{,}75) = 0{,}4990 + 0{,}4990 = 0{,}998$$

b) mais de 800 dias;

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{800 - 850}{40} = -1{,}25$$

$$P(Z > -1{,}25) = P(-1{,}25 < Z < 0) + P(Z > 0) = P(0 < Z < 1{,}25)$$
$$+ P(Z > 0) = 0{,}3944 + 0{,}5 = 0{,}8944$$

c) menos de 750 dias.

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{750 - 850}{40} = -2{,}5$$

$$P(Z < -2{,}5) = P(Z < 0) - P(-2{,}5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(0 < Z < 2{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4938$$
$$+ P(Z > 0) = 0{,}3944 + 0{,}5 = 0{,}0062$$